2008年12月 纯粹数学与应用数学 Dec. 2008
第24卷 第4期 Pure and Applied Mathematics Vol.24 No.4

# 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 与除数函数 $d(n)$ 的混合均值

樊旭辉 [1,2]，赵春翔 [1]

(1. 西安市武警工程学院基础部, 陕西 西安 710086；2. 西北大学数学系, 陕西 西安 710127)

**摘 要**：对于任意的正整数 $n$, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 $m$, 使得 $n|m!$, 即就是 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in\mathbb{N}\}$. 本文的主要目的是应用初等方法研究 $S(n)$ 与除数函数 $d(n)$ 的加权均值问题, 并获得一个有趣的渐进公式.

**关 键 词**：Smarandache 函数 $S(n)$；除数函数 $d(n)$；混合均值；渐进公式

**中图分类号**：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2008)04-0662-04

## 1 引 言

对任意的正整数 $n$, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 $m$, 使得 $n|m!$, 即就是 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in\mathbb{N}\}$. 对于任意正整数 $n>1$, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 $n$ 的标准分解式. 由定义容易推出

$$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_s^{\alpha_s})\}\equiv S(p^{\alpha}) \tag{1}$$

例如:$S(1)=1,S(2)=2,S(3)=3,S(4)=4,S(5)=5,S(6)=3,S(7)=7,S(8)=4,\cdots$. 关于 $S(n)$ 的算术性质, 有不少学者进行研究并获得许多有理论价值的研究成果. 例如, 文 [2] 研究了 Smarandache 函数有界性问题, 得出了函数 $S(p^{\alpha})$ 的上下界估计. 即就是证明了

$$(p-1)\alpha+1\le S(p^{\alpha})\le(p-1)(\alpha+1+\log_p^{\alpha})+1 \tag{2}$$

文 [3] 研究了 $S(n)$ 的均值性质, 给出了该函数均值的一个较强渐进公式

$$\sum_{n\le x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\Big(\frac{x^2}{\ln^2 x}\Big)$$

文 [4] 证明了如果 $n$ 是一个素数, 那么 $SL(n)=S(n)$, 这里 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 $k$ 使得 $n|[1,2,\cdots,k]$, 其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数. 同时文 [4] 还提出下列问题: 求出使 (3) 式成立的所有正整数解

$$SL(n)=S(n), S(n)\ne n \tag{3}$$

文 [5] 完全解决了这个问题, 并证明了下面结论

收稿日期：2007-11-28.

基金项目：国家自然科学基金 (10671155).

作者简介：樊旭辉 (1975-), 讲师, 在读硕士, 研究方向: 数论.

任何满足 (3) 式的正整数 $n$ 可表示为

$$n = 12 \text{ 或 } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} p$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_s, p$ 表示不同的素数且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是满足 $p > p_i^{\alpha_i}, i = 1, 2, \cdots, s$ 的正整数.

此外, 文 [6] 研究了 $S(n)$ 的值的分布性质, 得到下面定理:

设 $P(n)$ 表示 $n$ 的最大素因子, 则对任意实数 $x > 1$, 有渐进公式

$$\sum_{n \le x} \Big( S(n) - P(n) \Big)^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2}) x^{\frac{3}{2}}}{3 \ln x} + O\left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann -Zeta 函数.

文 [7] 研究了 $(S(n) - S(S(n)))^2$ 的均值问题, 证明了对任意的正整数 $k$ 及任意实数 $x > 2$ 有渐进公式

$$\sum_{n \le x} \Big( S(n) - S(S(n)) \Big)^2 = \frac{3}{2} \zeta(\frac{3}{2}) x^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x} \right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann- Zeta 函数, $c_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是可计算的常数.

本文的主要目的是研究一个包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 与 Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 的混合均值问题, 并给出一个渐进公式, 具体说就是证明了下面的结论

**定理**　对于任意实数 $x \ge 2$, 有渐进公式

$$\sum_{n \le x} d(n) S(n) = \frac{\pi^4}{36} \frac{x^2}{\ln x} + O\Big( \frac{x^2}{\ln^2 x} \Big)$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数, 即 $n$ 的所有正因子的个数, $d(n) = \sum\limits_{d|n} 1$.

## 2 定理的证明

在这一部分用初等方法给出定理的证明. 事实上在和式

$$\sum_{n \le x} d(n) S(n)$$

中, 将区间 $[1, x]$ 中的正整数 $n$ 分为两个集合 $A$ 和 $B$, 其中集合 $A$ 包含所有那些满足存在素数 $p$ 使得 $p \mid n$ 且 $p > \sqrt{n}$ 的正整数; 而集合 $B$ 包含所有那些在区间 $[1, x]$ 中不属于集合 $A$ 的正整数.

注意到除数函数 $d(n)$ 是可乘函数, 结合 (1) 式及集合 $A$ 的定义有

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A} d(n) S(n) &= \sum_{\substack{n \le x, p|n \\ p > \sqrt{n}}} d(n) S(n) = \sum_{\substack{pn \le x \\ n < p}} d(np) S(np) \\ &= \sum_{\substack{pn \le x \\ n < p}} 2pd(n) = \sum_{n \le \sqrt{x}} 2d(n) \sum_{n < p \le \frac{x}{n}} p \end{aligned} \tag{4}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$, 于是利用 Abel 求和公式 (参阅文 [8] 定理 4.2) 及素数定理 (参阅文 [9] 定理 3.2)

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\frac{x}{\ln x}+O\Big(\frac{x}{\ln^2 x}\Big)$$

有

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\le\frac{x}{n}}p&=\pi(\frac{x}{n})\frac{x}{n}-n\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}\pi(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{x^2}{n^2\ln(\frac{x}{n})}-\int_n^{\frac{x}{n}}\left(\frac{t}{\ln t}+O\Big(\frac{t}{\ln^2 t}\Big)\right)\mathrm{d}t+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^2(\frac{x}{n})}\right)\\&=\frac{x^2}{2n^2\ln(\frac{x}{n})}+O\Big(\frac{x^2}{n^2\ln^2(\frac{x}{n})}\Big)\end{aligned}\tag{5}$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^2}=\frac{\pi^4}{36}$$

结合 (4)、(5) 式有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}d(n)S(n)&=\sum_{n\le\sqrt{x}}2d(n)\left(\frac{x^2}{2n^2\ln(\frac{x}{n})}+O\Big(\frac{x^2}{n^2\ln^2(\frac{x}{n})}\Big)\right)\\&=\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{x^2d(n)}{n^2\ln(\frac{x}{n})}+O\Big(\frac{x^2}{\ln^2 x}\Big)\\&=\frac{\pi^4}{36}\frac{x^2}{\ln x}+O\Big(\frac{x^2}{\ln^2 x}\Big)\end{aligned}\tag{6}$$

现在讨论集合 $B$ 中的情况. 由 (1) 式及集合 $B$ 的定义知对任意的 $n\in B$, 当 $n$ 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 时, 有两种情况

$$S(n)=p_s\le\sqrt{n}\ \text{或者}\ S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),\cdots,\ S(p_s^{\alpha_s})\}\equiv S(p_i^{\alpha_i}),\ \alpha_i\ge 2$$

因此有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B}d(n)S(n)&=\sum_{\substack{n\le x,p|n\\p\le\sqrt{n}}}d(n)S(n)+\sum_{\substack{n\le x,p^\alpha|n\\n>p,\alpha\ge 2}}d(n)S(n)\\&\le\sum_{np\le x}2d(n)\sqrt{n}+\sum_{\substack{np^\alpha\le x\\\alpha\ge 2}}(\alpha+1)d(n)S(p^\alpha)\end{aligned}$$

注意到 (2) 式及 $\alpha<\ln n$, 于是有

$$\sum_{n\in B}d(n)S(n)\ll\sum_{n\le x}d(n)\sqrt{n}\ln n\ll x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x\tag{7}$$

其中用到渐进式

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x + O(x)$$

由集合 $A$,$B$ 的定义结合 (6)、(7) 式有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} d(n)S(n) &= \sum_{n\in A} d(n)S(n) + \sum_{n\in B} d(n)S(n) \\ &= \frac{\pi^4}{36}\frac{x^2}{\ln x} + O\Big(\frac{x^2}{\ln^2 x}\Big)\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

**参 考 文 献**

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Farris Mark, Mitchell Patrick. Bounding the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002,13:37-42.

[3] Wang Yongxing. On the Smarandache function [C]//Zhang Wenpeng, Li Junzhuang, Liu Duan sen. Research on Smarandache Problem In Number Theory II. Hexis:phoenix.AZ, 2005.

[4] Murthy. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001,12:307-309.

[5] Le Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004,14:186-188.

[6] 徐哲峰. Smarandache 函数的均值分布性质 [J]. 数学学报,2006,49(5):1009-1012.

[7] Lu Zhongtian. On the Smarandache function and its mean value [J]. Scientia Magna ,2007,3(2):104-108.

[8] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York:Springer-Verlag ,1976.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社,1988.

[10] 吕国亮. 关于 F.Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值 [J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3):315-317.

# On the hybrid mean value of the Smarandache function and the Dirichlet divisor function

FAN Xu-hui[1,2], ZHAO Chun-xiang[2]

( 1. Foundation Department, Engineering College of Armed Police Force, Xi'an　710086, China;

2.Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an　710127, China)

**Abstract:** For any positive integer $n$, the Smarandache function $S(n)$ defined as the smallest positive integer $m$ such that $n|m!$ . That is, $S(n) = \min\{m : n|m!, m \in \mathbb{N}\}$. The main purpose of the paper is using the elementary methods to study the hybrid mean value problem involving the Smarandache function and the Dirichlet divisor function, and to give a sharper asymptotic formula for it.

**Keywords:** Smarandache function, Dirichlet divisor function, Hybrid mean value, Asymptotic formula.

**2000 MSC:** 11B83.